

MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS AL DISEÑO DE NUEVOS GENERADORES EÓLICOS

Alejandro D. Otero

Grupo ISEP (Investigaciones en Sistemas Energéticos Primarios)
Facultad de Ingeniería, UBA
Paseo Colón 850, Buenos Aires, C1063ACV, Argentina
email: aotero@fi.uba.ar

Key Words: Energía Eólica, Estructuras Reticuladas, Vigas, Elementos Finitos.

Abstract.

En este trabajo se muestran las herramientas numéricas utilizadas en el estudio del comportamiento estructural de un nuevo concepto en la conversión eolo-eléctrica enfocado a mejorar el aprovechamiento del recurso eólico en áreas de velocidades de vientos elevadas. La estructura de la máquina estudiada se discretiza por medio del Método de Elementos Finitos. La formulación variacional se obtiene a partir de un funcional general asociado considerando hipótesis lineales y particularizado para el estudio de vigas y barras. Este funcional asociado al problema de vigas representa la Energía Potencial Total. En el problema particular analizado, se simuló el comportamiento de la estructura de los vagones generadores y se establecieron parámetros de comportamiento global efectivos en la tarea de diseño. Como resultados de la primera etapa de análisis lineal, se obtuvo la variación de estos parámetros en función de la trayectoria y las deformaciones de la estructura. Por último, en este trabajo se muestran los avances en la actual etapa de estudio considerando comportamiento no lineal y donde se profundiza en el estudio del aspa de la máquina modelada como una viga con sección no homogénea. Para ello el problema tridimensional se descompone en un problema bidimensional lineal en el dominio de la sección de la viga y otro unidimensional no lineal a lo largo de la línea de referencia de la viga.

1. INTRODUCCIÓN

La energía eólica es una de las fuentes energéticas de mayor crecimiento en la actualidad. Su utilización está ampliamente difundida en algunas regiones del planeta y hoy en día se pueden conseguir “por catálogo” máquinas de hasta 2,5 MW. Considerando que la energía aportada por un flujo eólico depende del cubo de la velocidad del mismo y del área interceptada, es evidente que las instalaciones en zonas de altas velocidades de viento resultan en una alta rentabilidad y que para aumentar la energía extraída de un determinado flujo hay que aumentar el tamaño de la instalación. En las máquinas eólicas clásicas de eje horizontal la velocidad perimetral máxima de las aspas está limitada en cierta proporción de la velocidad incidente del viento. Debido a esto, para mantener la velocidad perimetral por debajo de dicha velocidad máxima se debe reducir la velocidad angular del rotor al aumentar el diámetro. Esto complica el acoplamiento con el generador eléctrico, ya que la velocidad del mismo está dada por la frecuencia de la red, y además produce que grandes áreas del rotor disminuyan su rendimiento aerodinámico fácilmente.

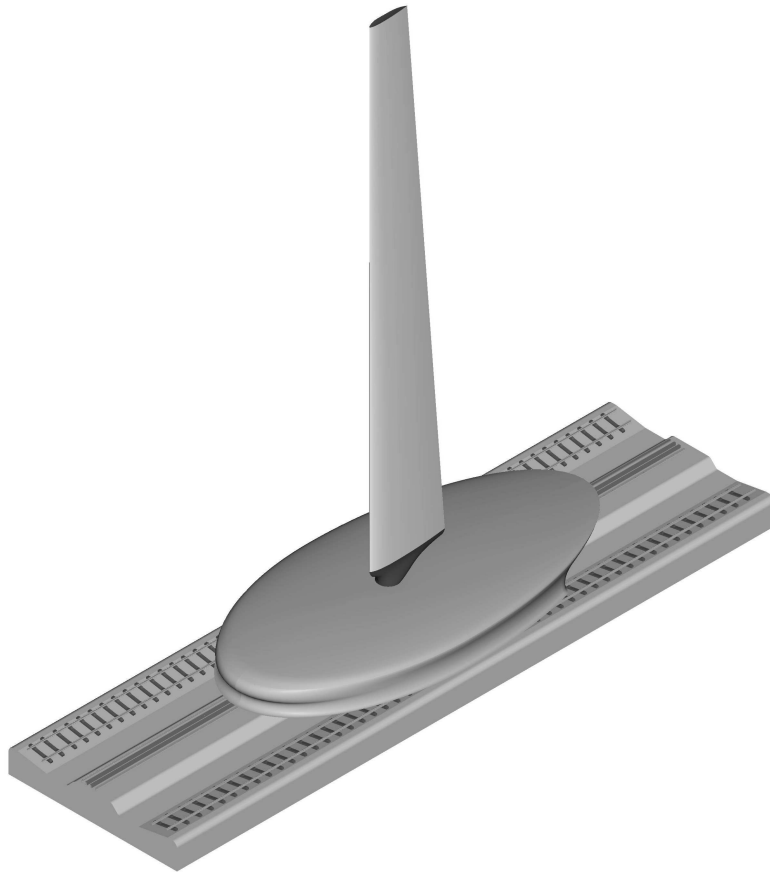


Figura 1: Elemento generador del Rotor VGOT Darrieus.

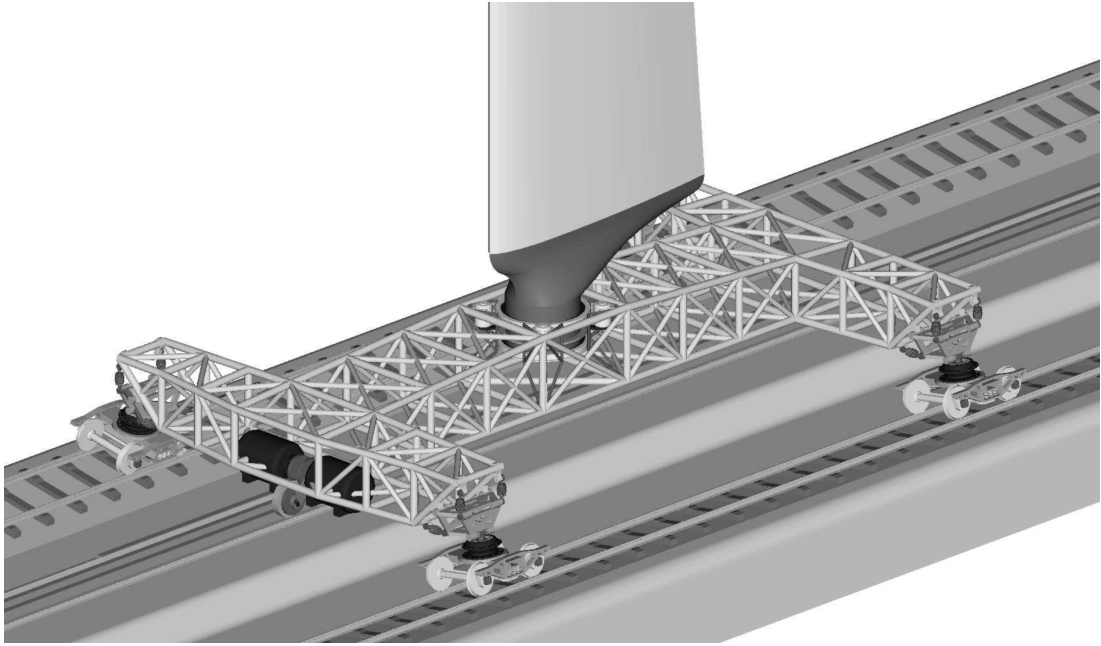


Figura 2: Detalle de un elemento generador del Rotor VGOT Darrieus.

Teniendo en cuenta estas consideraciones surgió la idea de utilizar el rotor Darrieus para aplicación eólica de una manera distinta a la convencional. Habitualmente las aspas giran solidarias en torno a un eje vertical central. Si se quiere fabricar generadores de muy alta potencia es necesaria una gran área barrida por las aspas. Esas grandes dimensiones generan, como en el caso de máquinas de eje horizontal, una serie de problemas de gigantismo en el diseño del rotor y de acoplamiento con la máquina eléctrica. Por otro lado, en el caso de un Darrieus convencional, la trayectoria circular produce fenómenos aerodinámicos no estacionarios que causan fluctuaciones en las fuerzas actuantes sobre las aspas que tienden a engendrar problemas de fatiga. En el nuevo concepto del Rotor Darrieus VGOT (Variable-Geometry Oval Trajectory)¹ cada aspa en vez de girar fija a un eje central se desplaza sobre rieles montada sobre un chasis formado por una estructura reticulada, soportada por boogies estándar de ferrocarril (ver Figuras 1 y 2). Cada elemento generador está compuesto por el aspa, el chasis, un carenado de plástico reforzado con fibras para disminuir efectos aerodinámicos adversos, su propio sistema de generación, los boogies y la suspensión que los vincula con el chasis. La energía eléctrica generada se transmite a través de un sistema de tercer riel. En el VGOT si se mantuviera constante la velocidad de los elementos generadores se podría aumentar el área interceptada, y por ende la potencia de la instalación, sin los problemas de bajas velocidades de rotación asociados a los rotores Darrieus clásicos. Al no estar los elementos generadores fijos a ningún eje central podrían seguir una trayectoria no circular (Figura 3). En ciertas regiones donde la rosa de los vientos muestra una dirección preferencial, esto resultaría en un aumento de

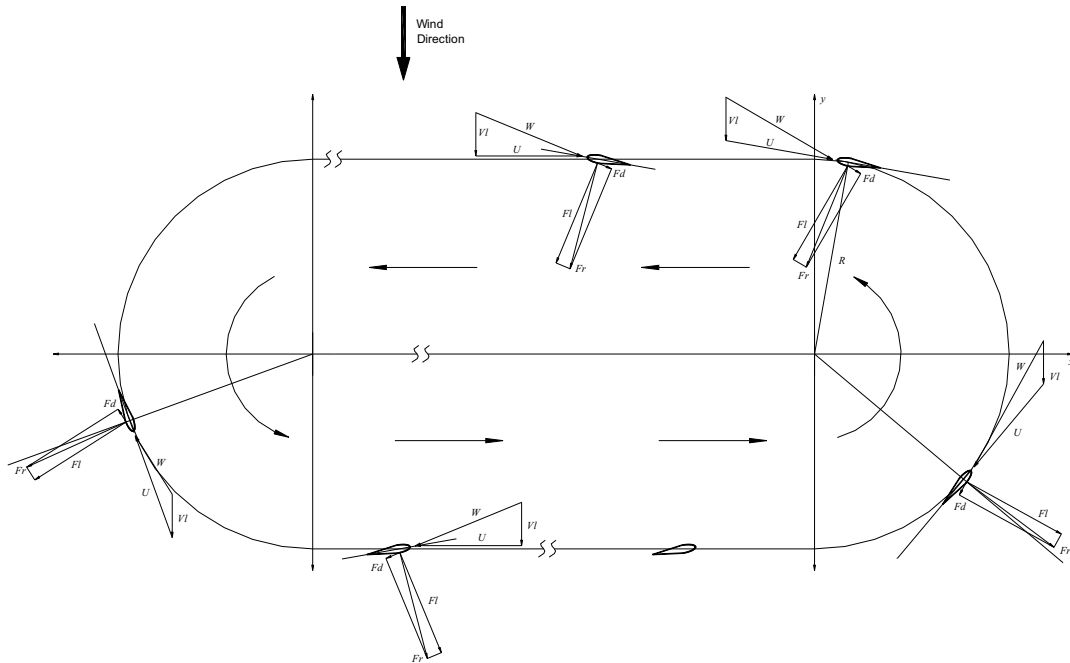


Figura 3: Trayectoria del Rotor VGOT Darrieus.

la eficiencia en la conversión energética al aumentar mediante tramos rectos las porciones donde las aspas se desplazarán aproximadamente perpendiculares a la dirección del viento incidente.

Al afrontar el estudio del comportamiento estructural del VGOT Darrieus se presentan varias particularidades que lo diferencian de otro estudio de estructuras reticuladas o vigas. En el estudio del asa, ésta presenta una sección variable en la longitud tanto por la variación de la cuerda del perfil aerodinámico como por el refuerzo de la sección en las partes más sometidas a esfuerzos solicitantes. También es necesario aplicar las cargas aerodinámicas sobre el asa, las cuales dependen de la posición del vagón generador a lo largo de la trayectoria y varían a lo largo de la longitud del asa. En ese sentido, el cálculo de las cargas aerodinámicas no es trivial ya que la máquina funciona en conjunto y no es posible analizar el comportamiento aerodinámico de cada elemento generador por separado. Al estudiar la estructura reticulada tridimensional se deben considerar los efectos de la vinculación de ésta con el asa y la suspensión del vagón generador, sumando los efectos de la masa de los componentes y del lastre colocado para mejorar la estabilidad de los vagones generadores. La suspensión merece una mención aparte ya que, por las características de la máquina propuesta, hubo que concebir un diseño que se aleja de lo convencional. Esto se debe principalmente a que cada vagón generador está sometido a cargas fluctuantes, de origen aerodinámico, en sentido transversal a las vías. El sistema de suspensión debe absorber y amortiguar estas cargas, ya que si las transmitiera directamente al material

rodante y, por ende, a las vías perjudicaría la estabilidad del vagón generador, pudiendo llegar al descarrilamiento. Además, la suspensión debe adaptarse a las imperfecciones del trazado minimizando sus efectos sobre la estructura y los componentes.

A continuación se muestran las tareas llevadas a cabo en el estudio estructural de los elementos generadores.

2. PRIMERA ETAPA: ANÁLISIS LINEAL

La primera etapa del estudio estructural se llevó a cabo considerando hipótesis lineales, es decir: pequeños desplazamientos y deformaciones y material homogéneo elástico lineal. Los resultados obtenidos en este análisis resultarán precisos si las condiciones de funcionamiento se acercan a las hipótesis asumidas, como puede ocurrir en el funcionamiento en régimen nominal de la máquina. En los casos en que esto no se verifica, como podría ser en situaciones de velocidades de viento mucho mayores que las de diseño o falla de algún componente, el análisis lineal constituye una herramienta valiosa para entender cuáles comportamientos no lineales aparecerán y poder incluirlos en etapas posteriores de estudio. Por ello, el análisis del comportamiento bajo hipótesis lineales se impone como primer etapa de estudio sobre todo en este caso en que se trata de un diseño innovador el cual presenta características que lo diferencian de otros problemas clásicos de ingeniería estructural.

2.1. Modelo Matemático

Considerando las hipótesis antes mencionadas, se parte de un funcional del tipo de Hu-Washisu que representa la Energía Potencial Total y, luego de aplicar la hipótesis de Material Elástico Lineal se llega a la expresión del funcional de Hellinger-Reissner² (1) que conduce a una formulación mixta donde las variables independientes son los desplazamientos y las deformaciones. En lo que sigue, las coordenadas locales en cada punto de la viga x, y, z se consideran de forma que las direcciones definidas por x e y estén embebidas en la sección y la definida por z sea paralela a la tangente a la línea de referencia de la viga.

$$\Pi_{HR}^* = \int_V \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \partial \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B \right) dV - \int_{S_f} (\mathbf{u}^{S_f})^T \mathbf{f}^{S_f} dS \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el arreglo de las componentes del tensor de deformaciones,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left[\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right], \quad \begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) \\ \gamma_{ij} = 2 \varepsilon_{ij} \quad \forall i \neq j \end{cases},$$

$\partial \boldsymbol{\varepsilon}$ es el operador diferencial que relaciona desplazamientos y deformaciones; \mathbf{C} es la matriz constitutiva; \mathbf{u} es el desplazamiento de la línea de referencia de la viga, $\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$; \mathbf{f}^B es el vector de fuerzas volumétricas, $(\mathbf{f}^B)^T = [f_x \quad f_y \quad f_z]$; \mathbf{S}_f es la

superficie con condiciones de borde tipo Neumann; \mathbf{u}^{S_f} es el desplazamiento sobre \mathbf{S}_f ; y \mathbf{f}^{S_f} es el vector de fuerzas superficiales, $(\mathbf{f}^{S_f})^T = \begin{bmatrix} f_x^{S_f} & f_y^{S_f} & f_z^{S_f} \end{bmatrix}$.

Luego este funcional se particulariza para el caso de vigas bajo la Hipótesis de Timoshenko, es decir que las secciones originalmente normales al eje de la viga se mantienen planas luego de la deformación pero ya no son normales debido a la distorsión por corte, llegando a

$$\begin{aligned} \Pi^{**} = & \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{zz} E \varepsilon_{zz} - \frac{1}{2} \gamma_{zx}^{AS} G \gamma_{zx}^{AS} - \frac{1}{2} \gamma_{yz}^{AS} G \gamma_{yz}^{AS} + \gamma_{zx}^{AS} G \gamma_{zx} + \gamma_{yz}^{AS} G \gamma_{yz} \right) dV - \\ & - \int_V (\mathbf{u}^T \mathbf{f}^B) dV - \int_{S_f} (\mathbf{u}^{S_f})^T \mathbf{f}^{S_f} dS. \end{aligned} \quad (2)$$

Además como las hipótesis consideradas son lineales puede utilizarse el principio de superposición para añadir los efectos de los esfuerzos axiales, de torsión, flexión y corte considerados en forma aislada. Expresando el funcional (2) en función de las variables primarias y secundarias del problema resulta

$$\begin{aligned} \Pi^{**} = & \frac{E}{2} \int_L \left[\underbrace{I_x \left(\frac{d\theta_1}{dz} \right)^2 + I_y \left(\frac{d\theta_2}{dz} \right)^2}_{(i)} + \underbrace{A \left(\frac{du_3}{dz} \right)^2}_{(ii)} \right] dz + \\ & + \frac{G}{2} \int_L \left[\underbrace{-A \left(k_x (\gamma_{zx}^{AS})^2 + k_y (\gamma_{yz}^{AS})^2 \right)}_{(iii)} + \right. \\ & \left. + 2 A \left(\underbrace{k_x \gamma_{zx}^{AS} \left(\frac{du_1}{dz} - \theta_2 \right) + k_y \gamma_{yz}^{AS} \left(\frac{du_2}{dz} + \theta_1 \right)}_{(iii)} \right) + \underbrace{I_p \left(\frac{d\theta_3}{dz} \right)^2}_{(iv)} \right] dz - \\ & - \underbrace{\int_L \mathbf{u}^T \mathbf{p} dz - \int_L \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{m} dz - \sum_i (\mathbf{u}^i)^T \mathbf{F}^i - \sum_j (\boldsymbol{\theta}^j)^T \mathbf{M}^j}_{(v)} \end{aligned} \quad (3)$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de rotación de la sección de la viga en los planos yz y zx respectivamente. $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]$ y \mathbf{u} forman los desplazamiento generalizados que son las incógnitas primitivas que fueron interpoladas cuadráticamente. γ_{yz}^{AS} y γ_{zx}^{AS} representan las distorsiones debidas a los esfuerzos de corte en los planos yz y zx , el superíndice AS denota que dichas distorsiones se “asumen” con variación lineal a lo largo de cada

elemento y constante en cada sección. I_x , I_y , I_p y A son respectivamente los momentos de inercia y polar y el área de la sección. k_x y k_y son las constantes de corte de la sección utilizadas para corregir el hecho de que la distorsión por corte se asume constante en toda la sección, lo cual no es cierto. \mathbf{p} , \mathbf{m} , \mathbf{F}^i and \mathbf{M}^j son respectivamente las cargas y momentos distribuidos y concentrados y L es la longitud de la viga. Los términos (i) en (3) están asociados a la energía de deformación debida a la flexión, (ii) a la deformación axial, (iii) a las deformaciones por corte, (iv) a la torsión y los últimos términos (v) están asociados con las cargas y momentos externos.

En el caso de barras, las cuales presentan rigidez solamente frente a esfuerzos axiales, el funcional (3) se reduce a

$$\Pi_B^{**} = \frac{E}{2} \int_L A \left(\frac{du_3}{dz} \right)^2 dz - \int_L u_3 p_3 dz - \sum_i u_3^i F_3^i. \quad (4)$$

2.2. Modelo Numérico

Los desplazamientos generalizados, $\boldsymbol{\theta}$ y \mathbf{u} , se interpolaron por medio de elementos isoparamétricos de tres nodos cuyas funciones con continuidad C^0 en función de la coordenada natural r , son^{2,3}

$$h_1 = \frac{1}{2} (r^2 - r); \quad h_2 = \frac{1}{2} (r^2 + r); \quad h_3 = 1 - r^2; \quad (5)$$

De esta forma los desplazamientos generalizados interpolados correspondientes a la dirección j son

$$u_j(r) = h_i(r) u_j^i, \quad \theta_j(r) = h_i(r) \theta_j^i, \quad (6)$$

donde los índices repetidos indican una sumatoria en los tres nodos.

Las derivadas de los desplazamientos generalizados respecto de la coordenada local z son

$$\frac{du_j}{dz}(r) = \frac{d(h_i u_j^i)}{dz} = \frac{dh_i}{dr} \frac{dr}{dz} u_j^i = J^{-1} \frac{dh_i}{dr} u_j^i \quad (7)$$

$$\frac{d\theta_j}{dz}(r) = \frac{d(h_i \theta_j^i)}{dz} = \frac{dh_i}{dr} \frac{dr}{dz} \theta_j^i = J^{-1} \frac{dh_i}{dr} \theta_j^i \quad (8)$$

Escribiendo lo anterior en forma matricial

$$u_j(r) = \mathbf{H}_{u_j} \hat{\mathbf{u}}, \quad \frac{du_j}{dz}(r) = \mathbf{B}_{u_j} \hat{\mathbf{u}}, \quad (9)$$

$$\theta_j(r) = \mathbf{H}_{\theta_j} \hat{\mathbf{u}}, \quad \frac{d\theta_j}{dz}(r) = \mathbf{B}_{\theta_j} \hat{\mathbf{u}}, \quad (10)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ es el arreglo de valores nodales de los desplazamientos generalizados

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad \theta_1^1 \quad \theta_2^1 \quad \theta_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \theta_1^2 \quad \theta_2^2 \quad \theta_3^2 \quad u_1^3 \quad u_2^3 \quad u_3^3 \quad \theta_1^3 \quad \theta_2^3 \quad \theta_3^3], \quad (11)$$

y \mathbf{H} y \mathbf{B} son las funciones de interpolación y sus derivadas en forma matricial. A continuación se muestra como ejemplo las matrices correspondientes a las funciones de interpolación para u_1 ,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{u_1} &= [h_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ h_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ h_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \mathbf{B}_{u_1} &= J^{-1} [\frac{dh_1}{dr} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{dh_2}{dr} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{dh_3}{dr} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \end{aligned} \quad (12)$$

\mathbf{H} y \mathbf{B} para los otros grados de libertad se obtienen en forma similar.

Se ha usado integración por cuadratura de Gauss en 3 puntos para los términos interpolados por funciones cuadráticas.^{2,4} Para evitar los problemas de bloqueo γ_{zx}^{AS} y γ_{yz}^{AS} se interpolaron con funciones lineales discontinuas entre elementos, con condensación a nivel elemental.² Para los términos asociados con γ_{zx}^{AS} y γ_{yz}^{AS} se usó integración por cuadratura de Gauss en 2 puntos y las funciones de interpolación que satisfacen

$$h_1^*(g_1^*) = 1, \quad h_1^*(g_2^*) = 0, \quad h_2^*(g_1^*) = 0, \quad h_2^*(g_2^*) = 1, \quad (13)$$

donde g_1^* y g_2^* son los puntos de integración correspondientes. Entonces

$$\gamma_{zx}^{AS}(r) = h_i^*(r) (\gamma_{zx}^{AS})^{g_i^*}, \quad \gamma_{yz}^{AS}(r) = h_i^*(r) (\gamma_{yz}^{AS})^{g_i^*}, \quad (14)$$

que puede expresarse en forma matricial como

$$\gamma_{zx}^{AS} = \mathbf{H}_{\gamma_{zx}} \boldsymbol{\gamma}^{AS}, \quad \gamma_{yz}^{AS} = \mathbf{H}_{\gamma_{yz}} \boldsymbol{\gamma}^{AS}. \quad (15)$$

donde $(\boldsymbol{\gamma}^{AS})^T = [\gamma_{zx}^{g_1^*} \ \gamma_{zx}^{g_2^*} \ \gamma_{yz}^{g_1^*} \ \gamma_{yz}^{g_2^*}]$ son los valores de las distorsiones en g_1^* y g_2^* , $\mathbf{H}_{\gamma_{zx}} = [h_1^* \ h_2^* \ 0 \ 0]$, y $\mathbf{H}_{\gamma_{yz}} = [0 \ 0 \ h_1^* \ h_2^*]$.

Sustituyendo las variables en (3) por su equivalente discreto e invocando la estacionaridad de dicho funcional se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\gamma} \\ \mathbf{K}_{\gamma u} & \mathbf{K}_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{AS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= E \int_{-1}^1 (I_x \mathbf{B}_{\theta_1}^T \mathbf{B}_{\theta_1} + I_y \mathbf{B}_{\theta_2}^T \mathbf{B}_{\theta_2} + A \mathbf{B}_{u_3}^T \mathbf{B}_{u_3}) |J| dr + G \int_{-1}^1 I_p \mathbf{B}_{\theta_3}^T \mathbf{B}_{\theta_3} |J| dr, \\ \mathbf{K}_{u\gamma} &= G \int_{-1}^1 A [(\mathbf{B}_{u_1} - \mathbf{H}_{\theta_2})^T \mathbf{H}_{\gamma_{zx}} + (\mathbf{B}_{u_2} + \mathbf{H}_{\theta_1})^T \mathbf{H}_{\gamma_{yz}}] |J| dr, \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{\gamma u} = \mathbf{K}_{u\gamma}^T = G \int_{-1}^1 A \left[\mathbf{H}_{\gamma zx}^T (\mathbf{B}_{u_1} - \mathbf{H}_{\theta_2}) + \mathbf{H}_{\gamma yz}^T (\mathbf{B}_{u_2} + \mathbf{H}_{\theta_1}) \right] |J| dr,$$

$$\mathbf{K}_{\gamma\gamma} = -G \int_{-1}^1 A \left(\mathbf{H}_{\gamma zx}^T \mathbf{H}_{\gamma zx} + \mathbf{H}_{\gamma yz}^T \mathbf{H}_{\gamma yz} \right) |J| dr,$$

$$\mathbf{P} = \int_{-1}^1 \left[(\mathbf{H}_{u_1} + \mathbf{H}_{u_2} + \mathbf{H}_{u_3})^T \widehat{\mathbf{p}} + (\mathbf{H}_{\theta_1} + \mathbf{H}_{\theta_2} + \mathbf{H}_{\theta_3})^T \widehat{\mathbf{m}} \right] |J| dr + \sum_i \widehat{\mathbf{F}}^i + \sum_j \widehat{\mathbf{M}}^j,$$

$\widehat{\mathbf{p}}$, $\widehat{\mathbf{m}}$, $\widehat{\mathbf{F}}^i$ y $\widehat{\mathbf{M}}^j$ son arreglos con los valores nodales correspondientes a las cargas y momentos distribuidos y concentrados.

Como se dijo, los grados de libertad asociados con γ^{AS} se condensan a nivel elemental. Despejando el vector γ^{AS} de la segunda fila de (16) y sustituyéndolo en la primera fila, se tiene

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\gamma} \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{-1} \mathbf{K}_{\gamma u})}_{\mathbf{K}_{el}} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{P}. \quad (17)$$

A continuación, la matriz \mathbf{K}_{el} y el vector \mathbf{P} son transformados para que correspondan a grados de libertad asociados a un sistema de coordenadas global, igual para todos los elementos, y ensamblados en una matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ y un vector de cargas $\tilde{\mathbf{P}}$ globales, arribando al sistema de ecuaciones final

$$\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{P}}, \quad (18)$$

donde $\tilde{\mathbf{U}}$ es el arreglo de los valores de los desplazamientos generalizados respecto del sistema de coordenadas global de toda la estructura.

Para imponer las condiciones de contorno esenciales o tipo Dirichlet se sigue el procedimiento clásico² reordenando (18) como

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{aa} & \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ba} & \tilde{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_a \\ \tilde{\mathbf{U}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_a \\ \tilde{\mathbf{P}}_b \end{bmatrix}, \quad (19)$$

donde $\tilde{\mathbf{U}}_a$ y $\tilde{\mathbf{P}}_a$ están asociados a los grados de libertad correspondientes a las incógnitas, y $\tilde{\mathbf{U}}_b$ y $\tilde{\mathbf{P}}_b$ a los grados de libertad con condiciones de contorno esenciales. De la primera línea de (19),

$$\tilde{\mathbf{K}}_{aa} \tilde{\mathbf{U}}_a = \tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \tilde{\mathbf{U}}_b, \quad (20)$$

entonces

$$\tilde{\mathbf{U}}_a = \left(\tilde{\mathbf{K}}_{aa} \right)^{-1} \left(\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \tilde{\mathbf{U}}_b \right), \quad (21)$$

lo que da la solución final

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_a \\ \tilde{\mathbf{U}}_b \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Las reacciones de vínculo fueron calculadas de la segunda línea de (19),

$$\tilde{\mathbf{P}}_b = \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \tilde{\mathbf{U}}_a + \tilde{\mathbf{K}}_{bb} \tilde{\mathbf{U}}_b. \quad (23)$$

2.3. Aplicación a la Simulación del VGOT Darrieus

Las principales cargas que solicitan la estructura de los elementos generadores del VGOT Darrieus tienen origen aerodinámico. Estas cargas aerodinámicas fueron calculadas mediante un Modelo de Doble-Múltiple Tubo de Corriente,⁵⁻⁸ que fue resultado de trabajos previos, y fueron aplicadas como cargas distribuidas a lo largo del aspa. Estas cargas varían en función de la posición en la trayectoria y en el aspa, la figura 4 muestra las cargas por unidad de longitud en las direcciones tangenciales y normales a la cuerda del aspa en función de la posición paramétrica (s) (i.e. s varía de 0 a 1 al completar un ciclo). También se consideraron las cargas debidas al peso de la estructura, del aspa y otros componentes y cargas inerciales debidas a la aceleración centrípeta en las curvas. Las condiciones de contorno geométricas fueron aplicadas en los puntos donde la estructura se apoya sobre los boogües, y allí se restringió el desplazamiento en sentido vertical y transversal.

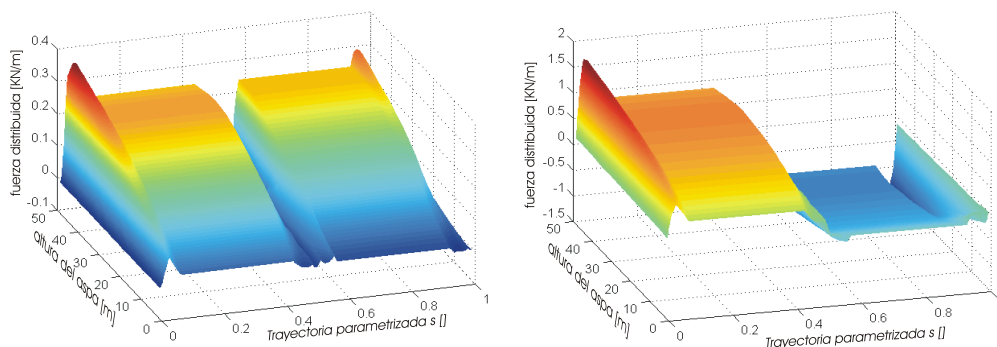


Figura 4: Cargas aerodinámicas en las direcciones tangencial y normal al aspa, en función de la posición en la altura del aspa y la trayectoria.

Además se consideraron los efectos de posibles imperfecciones en el trazado a través de corrimientos de los puntos de apoyo. Estos fueron simulados aleatoriamente como normalmente distribuidos a partir de datos de media y desviación estándar conocidos. Para cada punto de la trayectoria se simuló una serie de combinaciones de corrimientos y aquella que causaba el peor estado tensional se tomó como representativa y los parámetros correspondientes se usaron en la evaluación del efecto de estas imperfecciones.

Parámetros de Comportamiento Global

Para analizar en forma global el comportamiento de la estructura del Rotor VGOT Darrieus, se definieron una serie de parámetros que se consideraron representativos de dicho comportamiento:

Tensión de Von Mises vs. Tensión de fluencia del material (σ_{VM}/σ_y) medido en seis vigas testigo seleccionadas de forma de incluir aquellas donde se produce el máximo y el mínimo σ_{VM}/σ_y .

Desplazamiento transversal en el extremo del aspa (Δ_{trav}) se calculó y descompuso en tres componentes: una debida a la acción del sistema de suspensión, una debida a la deformación del chasis y otra debida a la flexión del aspa.

Desplazamientos transversales y verticales en la inserción del aspa (δ_{trav} , δ_{vert}) se calculó y descompuso en dos componentes: una debida a la acción de la suspensión y otra debida a la deformación del chasis. Estos parámetros resultaron útiles para ponderar la eficiencia del sistema de suspensión para amortiguar los efectos de las imperfecciones de los rieles sobre el resto de la estructura.

Torsión en el extremo del aspa (ϕ) calculado con el fin de comprobar que el ángulo de ataque del flujo que acomete al aspa, y por lo tanto las fuerzas aerodinámicas, no se vea alterado sustancialmente.

Reacciones de vínculo en dirección vertical y transversal y en la dirección de marcha (F_{vert} , F_{trav} y F_M) calculadas a fin de verificar el contacto entre las ruedas y los rieles. F_M actúa en la dirección de la trayectoria y corresponde a la fuerza de frenado de los generadores eléctricos. El valor de esta reacción multiplicado por la velocidad del elemento generador corresponde a la potencia mecánica, sin tener en cuenta las pérdidas, disponible para ser convertida en electricidad.

En la simulación del comportamiento estructural del Rotor VGOT Darrieus cada elemento de la estructura reticulada se simuló por medio de un elemento de viga, las suspensiones fueron representadas por cuatro elementos de barras cada uno y el aspa por 50 elementos de viga de sección variable, correspondiente al perfil aerodinámico NACA 0012 con cuerda variando entre 8 metros en la base y 4 metros en el extremo de la misma. Para el estudio se asumieron radios de los tramos curvos de la trayectoria de 350 m. y longitud del aspas de 50 m. en concordancia con las dimensiones utilizadas en el estudio aerodinámico. En la figura 5 se muestra esquemáticamente la malla resuelta con las condiciones de contorno geométricas y las cargas aerodinámicas.

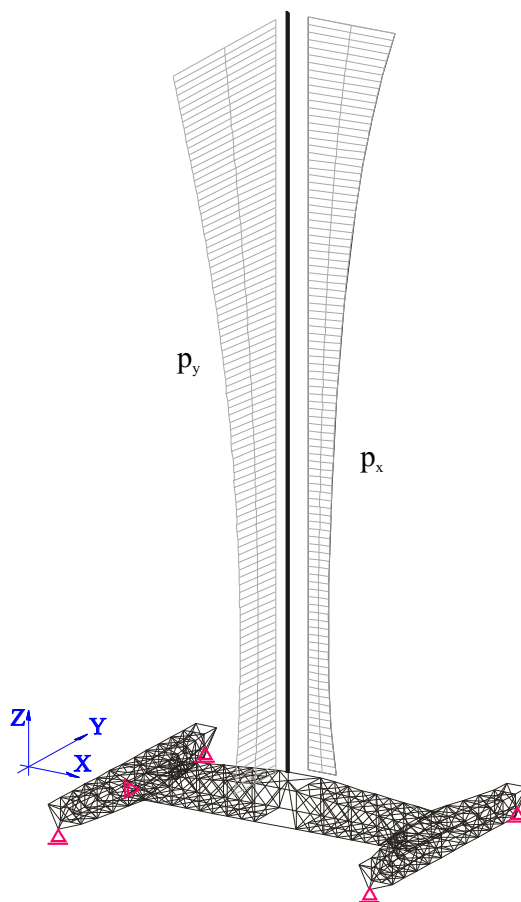


Figura 5: Esquema de la malla resuelta con las cargas aerodinámicas y las condiciones de borde esenciales.

2.4. Resultados

En el diseño se partió de una configuración base de la estructura reticulada,^{9,10} de la cual se obtuvieron resultados preliminares. Luego, dicha configuración fue modificada a fin de corregir ciertos aspectos desfavorables del comportamiento estructural. Luego de dos etapas intermedias se llegó a una configuración que, para esta etapa de análisis, presentaba parámetros de comportamiento satisfactorios y a la que denominamos *Configuración C* (Figura 6). Simultáneamente se fue modificando la configuración del asa y la suspensión para acompañar la evolución del diseño de la estructura. Luego, se simuló el comportamiento de la configuración C bajo los efectos de las imperfecciones del trazado.

A continuación se muestran la evolución de los parámetros de comportamiento de esta configuración a lo largo de la trayectoria. En la Figura 7 se muestran los resultados de la torsión ϕ obtenidos para la configuración C con y sin los corrimientos aleatorios de los apoyos. Puede observarse que los resultados en el primer caso (línea continua) se desvían de los del segundo (línea de trazos) pero copian su forma en general. Además, se ve que el

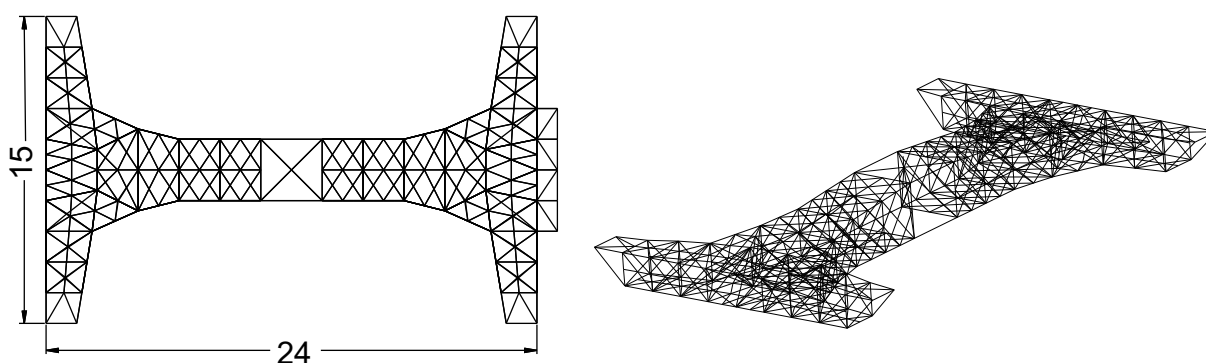


Figura 6: Esquema de la estructura reticulada analizada.

valor absoluto de la torsión del extremo del asa es menor que ocho centésimas de grado, en la primera curva y no supera las doce centésimas en la segunda. Al iniciar este trabajo se contemplaba la posibilidad de realimentar los valores de torsión en cada punto del asa a lo largo de la trayectoria para recalcular las fuerzas aerodinámicas. Debido a que el valor de dicha torsión es muy pequeño respecto de los valores del ángulo de ataque óptimo al cual trabajará el perfil la mayor parte del recorrido, se pueden despreciar los efectos de la torsión del asa en las fuerzas aerodinámicas.

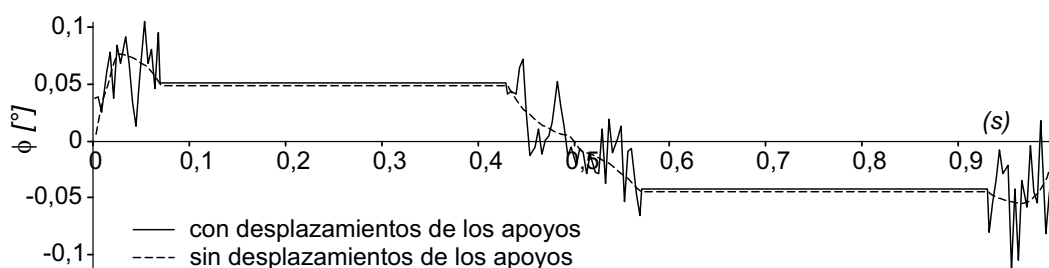


Figura 7: Torsión del extremo del asa con y sin corrimientos aleatorios de los apoyos.

En las Figuras 8 y 9 se muestran los desplazamientos en la inserción del asa descompuesto en sus tres componentes y en la Figura 10 se muestra el desplazamiento en el extremo del asa descompuesto en sus cuatro componentes. En ambos casos se ve que la deformación debida a los corrimientos aleatorios de los apoyos es absorbida casi en su totalidad por la suspensión, mostrando un adecuado funcionamiento de la misma. En la Figura 10 se ve que la deformación del asa tiene una magnitud elevada, por lo que en la siguiente etapa de estudio se deberían considerar grandes desplazamientos.

En la Figura 11 se muestran las reacciones de los apoyos en sentido vertical. Si el

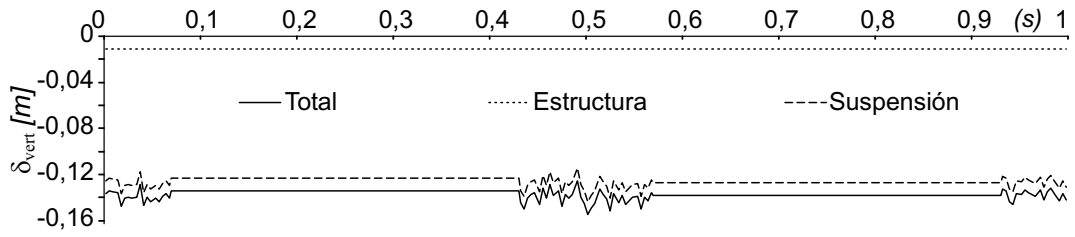


Figura 8: Desplazamiento vertical en la inserción del aspa.

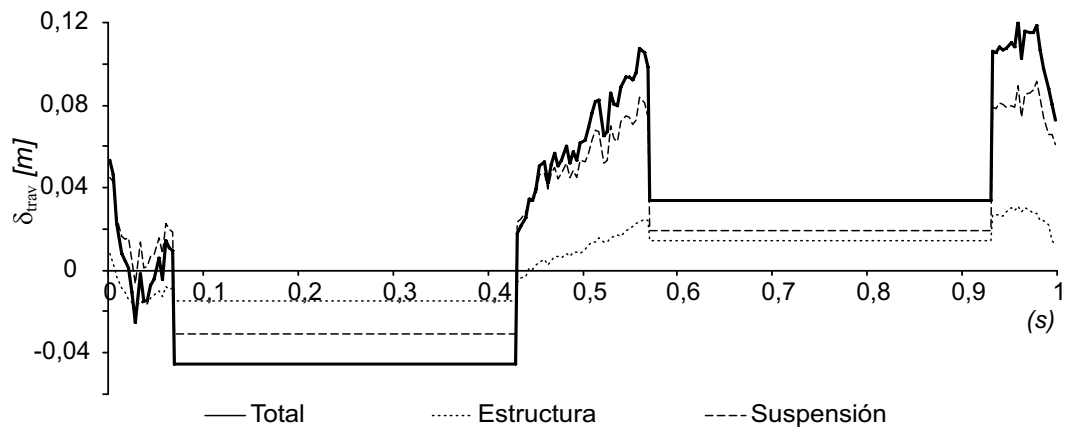


Figura 9: Desplazamiento transversal en la inserción del aspa.

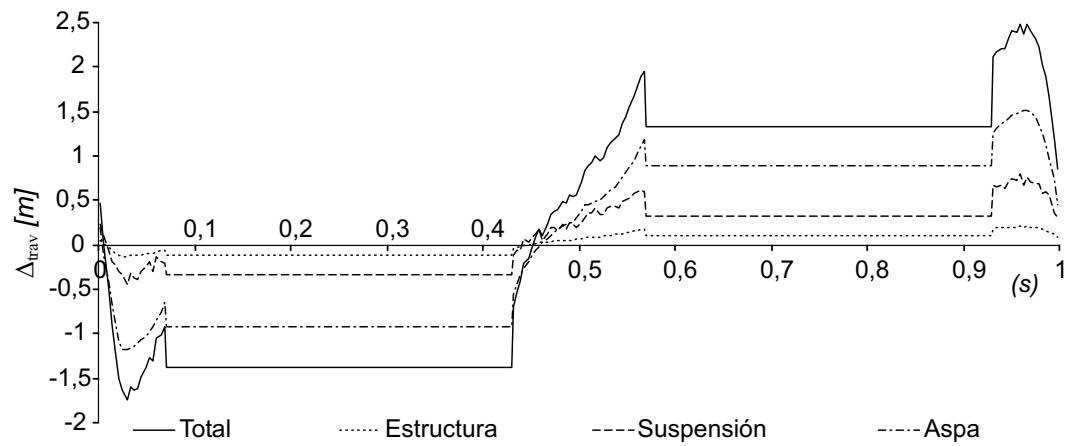


Figura 10: Desplazamiento transversal en el extremo del aspa.

valor de alguna de estas reacciones se aproximara a cero, lo cual no ocurre en este caso, existiría peligro de descarrilamiento. Este fue uno de los puntos tenidos en cuenta al modificar las configuraciones anteriores, modificando el lastre, a fin de evitar este peligro. En la Figura 12 se muestra la reacción correspondiente a la resistencia de los generadores.

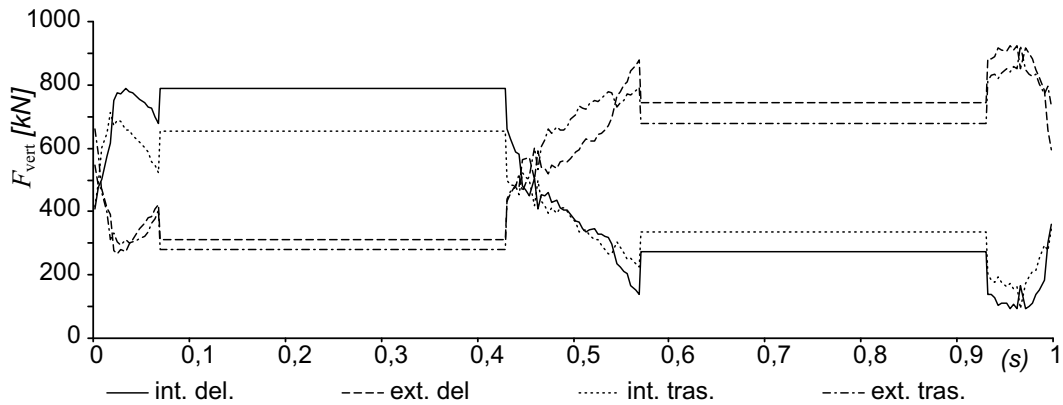


Figura 11: Reacciones de vínculo en dirección vertical.

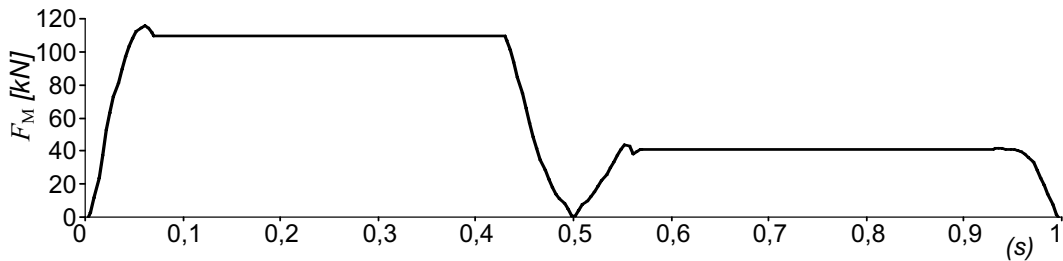


Figura 12: Reacción de vínculo en la dirección de la trayectoria.

Otro parámetro de alta importancia durante el diseño fue la relación entre la máxima tensión de Von Mises y la tensión de fluencia del material, cuya evolución para 6 vigas testigo, incluyendo la que alcanza el valor máximo y la que alcanza el mínimo, se muestra en la Figura 13. En esta etapa de diseño se buscó que este parámetro no superara valores de 0,4, para conservar un margen de seguridad adecuado y además reducir la cantidad de vigas poco solicitadas para optimizar la distribución de material.

En la figura 14 se muestran las formas en las cuales se deforma la estructura, estas configuraciones deformadas resultaron de gran utilidad en las etapas intermedias de diseño al proveer una concepción a grandes rasgos de las zonas de la estructura que debían modificarse.

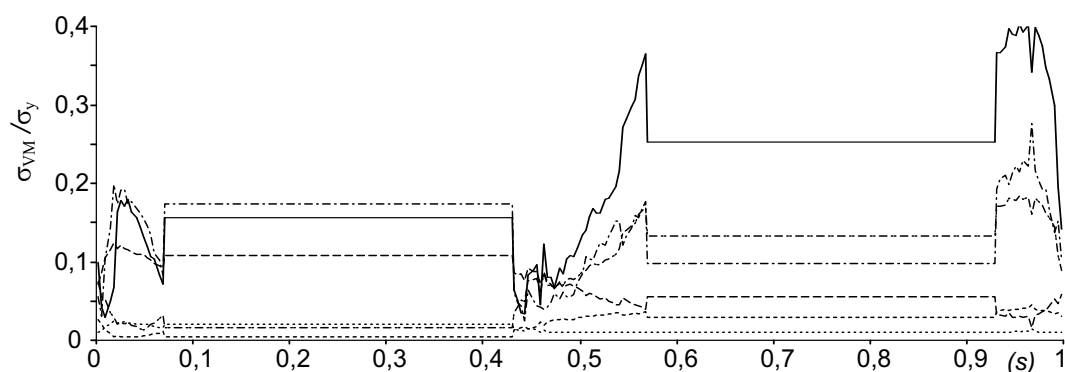


Figura 13: Relación entre la máxima tensión de Von Mises y la tensión de fluencia del material.

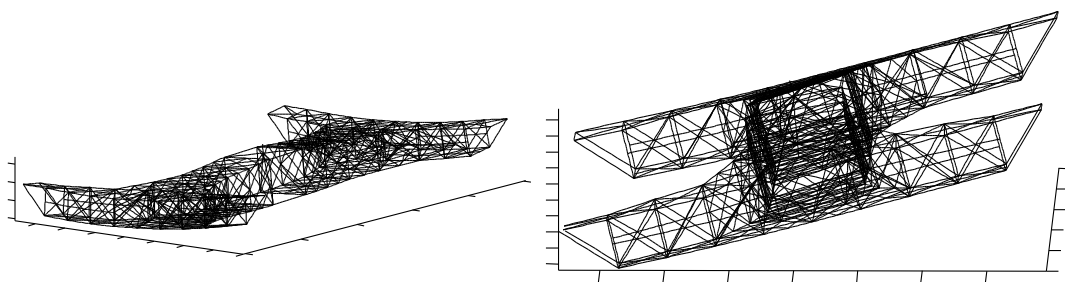


Figura 14: Configuraciones de la estructura deformada en las posiciones menos solicitada $s = 0,451$ (izquierda) y más solicitada $s = 0,963$ (derecha) de la trayectoria. Desplazamientos amplificados $\times 100$ y $\times 20$ respectivamente.

3. SEGUNDA ETAPA: ANÁLISIS NO LINEAL

A la luz de los resultados obtenidos en la primera etapa se plantea para la siguiente la necesidad de un estudio más detallado del aspa y de contemplar la posibilidad de grandes desplazamientos en las estructuras. En base a esto, en la actualidad el trabajo está centrado en la implementación de un modelo de deformación de la sección que sea apto para secciones no homogéneas y que permita la libre deformación de la misma abandonando la hipótesis de Timoshenko. De este modelo de deformación de la sección se obtiene la matriz de rigidez de la viga a ser utilizada en un modelo de vigas apto para grandes desplazamientos.

3.1. Modelo Matemático de la Deformación en la Sección de las vigas

En el presente desarrollo se sigue en parte.¹¹

Aprovechando que en las vigas una dimensión es relativamente mucho mayor que las otras dos se busca reducir el problema tridimensional a uno unidimensional equivalente,

en el sentido de la energía de deformación. Para ello se comienza planteando la energía de la sección o densidad de energía

En cada punto de la viga en la configuración de referencia se define una triada ortogonal de referencia $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ con el vector \mathbf{B}_1 paralelo a la tangente a la línea de referencia de la viga R y los otros 2 vectores $\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ contenidos en la sección normal a dicha línea de referencia. De igual forma, en la configuración deformada de la viga se define una terna ortogonal de referencia $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ con el vector \mathbf{t}_1 paralelo a la tangente a la línea de referencia de la viga en la configuración deformada r y los otros 2 vectores $\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ contenidos en un plano normal a dicha línea de referencia.

Tensor de Deformaciones de Jaumann - Biot - Cauchy

El Tensor de Deformaciones de Jaumann - Biot - Cauchy es un tensor Lagrangeano cuya expresión en el caso de deformaciones y rotaciones locales pequeñas es:

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ij} + F_{ji}) - \delta_{ij} \quad (24)$$

donde F_{ij} son las componentes del Tensor Gradiente de Deformación en las bases \mathbf{B}_i y \mathbf{t}_j .

La expresión surge en el caso de grandes desplazamientos y rotaciones globales por medio de la descomposición del tensor de rotación según lo expuesto en.¹² Despreciando los productos entre los alabeos y las medidas de deformación de la viga, ambos mucho menores que la unidad, las componentes del Tensor de Deformaciones de Jaumann - Biot - Cauchy expresado en las bases \mathbf{B}_i y \mathbf{t}_j pueden escribirse en forma abreviada como:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_h \mathbf{w} + \mathbf{\Gamma}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{\Gamma}_R \mathbf{w} + \mathbf{\Gamma}_l \mathbf{w}' \quad (25)$$

donde $()'$ indica derivación a lo largo de la línea de referencia y los vectores que aparecen en la (25) son

$\mathbf{\Gamma} = [\Gamma_{11} \quad 2\Gamma_{12} \quad 2\Gamma_{13} \quad \Gamma_{22} \quad 2\Gamma_{23} \quad \Gamma_{33}]^T$: arreglo de las componentes tensoriales del Tensor de Deformaciones de Jaumann - Biot - Cauchy,

$\mathbf{w} = [w^1 \quad w^2 \quad w^3]^T$: vector de alabeos,

$\boldsymbol{\varepsilon} = [\bar{\gamma}_{11} \quad \kappa^1 \quad \kappa^2 \quad \kappa^3]^T$: arreglo de las medidas de deformación de la línea de referencia de la viga, equivalentes a las de la teoría clásica de vigas o de Bernoulli.

$\mathbf{\Gamma}_h, \mathbf{\Gamma}_\varepsilon, \mathbf{\Gamma}_R$ y $\mathbf{\Gamma}_l$ son operadores y sus expresiones son:

$$\mathbf{\Gamma}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^3 & -x^2 \\ 0 & -x^3 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}_l = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_R = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{bmatrix} k^1 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) & -k^3 & k^2 \\ k^3 & k^1 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) & -k^1 \\ -k^2 & k^1 & k^1 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

En la (25) se ve la considerable ventaja existente en utilizar este tensor de deformaciones, el mismo resulta lineal en las medidas de deformación de la viga, los alabeos de la sección y las derivadas de estos.

Energía de Deformación de la Sección

La energía de deformación de la sección o densidad de energía viene dada por

$$2U = \langle \mathbf{\Gamma}^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma} \rangle \quad (27)$$

donde \mathcal{D} es la matriz simétrica de 6×6 que representa las características del material en la base \mathbf{B}_i y $\langle \bullet \rangle$ indica la integración sobre la sección de la viga.

Los alabeos se interpolan en la sección utilizando algún método de discretización (en este caso Elementos Finitos), de esta forma el vector de alabeos \mathbf{w} puede escribirse como

$$\mathbf{w} (x^1, x^2, x^3) = \mathbf{S} (x^2, x^3) \mathbf{V} (x^1) \quad (28)$$

donde \mathbf{S} es una matriz con las funciones de interpolación y \mathbf{V} es un vector columna con los valores de los alabeos en los nodos de discretización.

Reemplazando la discretización de la (28) en la (25), la expresión de la Densidad de Energía de la (27) resulta

$$\begin{aligned} 2U = & \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{E} \mathbf{V}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2)} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_{\varepsilon \varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2)} + \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{D}_{RR} \mathbf{V}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 (\frac{h}{l})^2)} + \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{D}_{ll} \mathbf{V}'}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 (\frac{h}{l})^2)} + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{h\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2)} + \\ & + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}'}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{R\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{l\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{Rl} \mathbf{V}'}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 (\frac{h}{l})^2)} \end{aligned} \quad (29)$$

donde se han definido las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{S}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{S}] \rangle & \mathbf{D}_{h\varepsilon} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{S}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_\varepsilon] \rangle \\ \mathbf{D}_{hR} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{S}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{S}] \rangle & \mathbf{D}_{hl} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{S}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{S}] \rangle \\ \mathbf{D}_{\varepsilon \varepsilon} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_\varepsilon]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_\varepsilon] \rangle & \mathbf{D}_{RR} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{S}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{S}] \rangle \\ \mathbf{D}_{ll} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{S}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{S}] \rangle & \mathbf{D}_{R\varepsilon} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{S}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_\varepsilon] \rangle \\ \mathbf{D}_{l\varepsilon} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{S}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_\varepsilon] \rangle & \mathbf{D}_{Rl} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{S}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{S}] \rangle \end{aligned} \quad (30)$$

Lo que sigue es minimizar la versión discreta del funcional $2U$ de la (29) respecto del vector de alabeos nodales \mathbf{V} y con las restricciones $\langle \langle w^i \rangle \rangle = 0$ y $\langle \langle x^2 w^3 - x^3 w^2 \rangle \rangle = 0$ de

forma de eliminar los movimientos de cuerpo rígido de la sección. Esto no puede hacerse exactamente pero puede resolverse en forma aproximada utilizando métodos perturbativos, analizando la componente de la Densidad de Energía en cada orden de magnitud. Para ello, se expande la incógnita \mathbf{V} en series de un parámetro pequeño.

Se adopta la expansión

$$\mathbf{V} = \underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^0 \hat{\mathbf{V}}_0}_{\mathbf{V}_0} + \underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^1 \hat{\mathbf{V}}_1}_{\mathbf{V}_1} + \underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^2 \hat{\mathbf{V}}_2}_{\mathbf{V}_2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{l}\right)^3\right) \quad (31)$$

donde h es la dimensión característica de la sección; l , la longitud característica de cambio del estado de cargas y R , la longitud característica de los radios de curvatura. l y R se suponen del mismo orden de magnitud. Entonces, se utiliza como parámetro pequeño a $\frac{h}{l}$, el cual es mucho menor que la unidad. Además, $\hat{\mathbf{V}}_0$, $\hat{\mathbf{V}}_1$ y $\hat{\mathbf{V}}_2$ son del orden de la unidad, μ es un valor representativo de las componentes de la matriz \mathcal{D} y ϵ , de las componentes del tensor de deformaciones. Reemplazando la (31) en la (29), agrupando los términos del mismo orden de magnitud y descartando aquellos términos de orden superior a $\left(\mu\epsilon^2\left(\frac{h}{l}\right)^2\right)$, lo que resulta suficiente para obtener una teoría de Timoshenko generalizada, e integrando por partes los términos donde aparece \mathbf{V}'_1 , resulta:

$$2U = \underbrace{2U_0}_{\mathcal{O}\left(\mu\epsilon^2\left(\frac{h}{l}\right)^0\right)} + \underbrace{2U_1}_{\mathcal{O}\left(\mu\epsilon^2\left(\frac{h}{l}\right)^1\right)} + \underbrace{2U_2}_{\mathcal{O}\left(\mu\epsilon^2\left(\frac{h}{l}\right)^2\right)} \quad (32)$$

donde:

$$2U_0 = \mathbf{V}_0^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0 + 2\mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{h\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}_{\epsilon\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} \quad (33)$$

$$2U_1 = 2\left(\mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}'_0 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{R\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{V}'_0{}^T \mathbf{D}_{l\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{h\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{V}_1^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0\right) \quad (34)$$

$$2U_2 = \mathbf{V}_1^T \mathbf{E} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{RR} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'_0{}^T \mathbf{D}_{ll} \mathbf{V}'_0 + 2\left(\mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}_1\right) + \quad (35)$$

$$+ 2\left(\mathbf{V}'_0{}^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}'_0 + \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{R\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{l\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}' + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{Rl} \mathbf{V}'_0\right) +$$

$$+ 2\left(\mathbf{V}_2^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_2^T \mathbf{D}_{h\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}\right)$$

Para resolver la componente de orden 0 en $\frac{h}{l}$ de los alabeos se debe minimizar la (33) respecto del vector de alabeos nodales bajo las siguientes condiciones

$$\mathbf{V}_0^T \mathbf{H} \boldsymbol{\psi}_{cl} = \mathbf{0} \quad (36)$$

con $\mathbf{H} = \langle \mathbf{S}^T \mathbf{S} \rangle$ y $\boldsymbol{\psi}_{cl}$ una matriz de cuatro columnas cada una correspondiente a una de las restricciones sobre los alabeos y perteneciente núcleo de la matriz \mathbf{E} , tal que

$$\mathbf{E} \boldsymbol{\psi}_{cl} = \mathbf{0} \quad (37)$$

de forma de eliminar los movimientos de cuerpo rígido de la sección. $\boldsymbol{\psi}_{cl}$ está normalizada, tal que

$$\boldsymbol{\psi}_{cl}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\psi}_{cl} = \mathbf{I} \quad (38)$$

Entonces aplicando multiplicadores de Lagrange para imponer las condiciones de la (36), minimizando $2U_0$ respecto del vector \mathbf{V}_0 se llega a la solución de los alabeos buscada, la cual debe resolver

$$\mathbf{E} \mathbf{V}_0 = -(\mathbf{I} - \mathbf{H} \boldsymbol{\psi}_{cl} \boldsymbol{\psi}_{cl}^T) \mathbf{D}_{h\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (39)$$

La matriz \mathbf{E} no es inversible ya que tiene un autovalor nulo de multiplicidad cuatro, correspondiente con los cuatro movimientos de cuerpo rígido. El vector del lado derecho de la (39) es ortogonal al núcleo de la matriz \mathbf{E} entonces, la existencia de la solución \mathbf{V}_0 la (39) está garantizada. Entonces, definiendo la matriz $\mathbf{E}^\#$,

$$\mathbf{E}^\# = \mathbf{H}^{-1/2} (\mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{E} \mathbf{H}^{-1/2})^+ \mathbf{H}^{-1/2} \quad (40)$$

donde el superíndice (+) indica la pseudoinversa de Moore-Penrose, se verifican las siguientes propiedades

$$\mathbf{E} \mathbf{E}^\# = \mathbf{I} - \mathbf{H} \boldsymbol{\psi}_{cl} \boldsymbol{\psi}_{cl}^T \quad (41)$$

$$\mathbf{E}^\# \mathbf{E} = \mathbf{I} - \boldsymbol{\psi}_{cl} \boldsymbol{\psi}_{cl}^T \mathbf{H} \quad (42)$$

$$\mathbf{E}^\# \mathbf{E} \mathbf{E}^\# = \mathbf{E}^\# \quad (43)$$

Así resulta

$$\mathbf{E} \mathbf{V}_0 = -\mathbf{E} \mathbf{E}^\# \mathbf{D}_{h\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (44)$$

$$\mathbf{V}_0 = -\mathbf{E}^\# \mathbf{D}_{h\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{V}}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (45)$$

obteniéndose el vector \mathbf{V}_0 que minimiza la componente $2U_0$ de la densidad de energía como función de las medidas de la deformación ($\boldsymbol{\varepsilon}$) de la línea de referencia de la viga.

Analizando la componente $2U_1$ de la densidad de energía de la (34) se ve que ésta no puede minimizarse respecto de \mathbf{V}_1 ya que esto no establece ninguna ecuación y no puede obtenerse relación alguna entre \mathbf{V}_1 y las medidas de la deformación de la línea de referencia de la viga $\boldsymbol{\varepsilon}$. Para obtener la expresión de \mathbf{V}_1 hay que minimizar la componente $2U_2$ de la (36) sujeto a restricciones equivalentes a la (36). Procediendo en forma análoga a lo anterior, se obtiene

$$\mathbf{V}_1 = -\mathbf{E}^\# (\mathbf{D}_R \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}_S \boldsymbol{\varepsilon}') = \bar{\mathbf{V}}_{1R} \boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\mathbf{V}}_{1S} \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (46)$$

donde $\mathbf{D}_R = \mathbf{D}_{hR} \bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{D}_{hR}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{D}_{R\varepsilon}$ y $\mathbf{D}_S = \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{D}_{hl}^T \bar{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{D}_{l\varepsilon}$.

Además, operando se muestra que la componente de los alabeos \mathbf{V}_2 no influye en la Densidad de Energía, por lo menos hasta el orden calculado.

Densidad de Energía

Reemplazando \mathbf{V}_0 y \mathbf{V}_1 en la expresión de la energía de la (32) y operando se llega a la expresión de la Densidad de Energía en función de las medidas de deformación de la viga en la teoría clásica

$$2U = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T 2\mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}'^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}^T 2\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}'' \quad (47)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon} + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{h\varepsilon} + \bar{\mathbf{V}}_0^T (\mathbf{D}_{hR} + \mathbf{D}_{hR}^T + \mathbf{D}_{RR}) \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{R\varepsilon} + \mathbf{D}_{R\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_R \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_{hl}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_{l\varepsilon} + \mathbf{D}_R^T \bar{\mathbf{V}}_{1S}) \\ &\quad + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{D}_{l\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_{1R} + \mathbf{D}_{l\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_{1R} + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{Rl} \bar{\mathbf{V}}_0 \\ \mathbf{C} &= \bar{\mathbf{V}}_{1S}^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1S}^T \mathbf{D}_{hl}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1S}^T \mathbf{D}_{l\varepsilon} + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{lS} \bar{\mathbf{V}}_0 \\ \mathbf{D} &= (\bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hl} + \mathbf{D}_{l\varepsilon}^T) \bar{\mathbf{V}}_{1S}. \end{aligned}$$

Transformación a las variables de la Teoría de Timoshenko

A pesar de que la expresión de la Densidad de Energía de la (47) es asintóticamente correcta, es difícil de utilizar debido a que aparecen las derivadas primeras y segundas de las medidas de la deformación, lo cual requeriría condiciones de contorno más complicadas que lo necesario. La teoría de vigas de Timoshenko no presenta estos inconvenientes y además resulta más conveniente para resolver por métodos numéricos como el de Elementos Finitos.

La Densidad de Energía expresadas en función de las medidas de deformación de la teoría de Timoshenko es

$$2U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^T & \boldsymbol{\gamma}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma}_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\gamma}_s + \boldsymbol{\gamma}_s^T \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma}_s \quad (48)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon} = [\gamma_{11} \ \beta^1 \ \beta^2 \ \beta^3]^T$ son las medidas de deformación de la teoría de Timoshenko debidas a extensión, torsión y flexión en dos ejes, $\boldsymbol{\gamma}_s = [2\gamma_{12} \ 2\gamma_{13}]^T$ las medidas de deformación debidas a la distorsión por corte.

Lo que sigue es encontrar las matrices \mathbf{X} , \mathbf{F} y \mathbf{G} de forma que la Densidad de Energía U de la (47) y la (48) sea equivalente, por lo menos en forma asintótica hasta el orden de precisión con que se trabaja.

Las medidas de deformación de la teoría de Timoshenko están asociadas a una nueva terna ortogonal \mathbf{b}_i en la configuración deformada que corresponde a la terna \mathbf{B}_i luego que ha rotado por la deformación de la viga, en este caso \mathbf{b}_1 no es tangente al eje de la viga si se considera la deformación por corte. La diferencia en la orientación de las ternas \mathbf{t}_i , asociada a las medidas de deformación de la teoría clásica, y \mathbf{b}_i se debe a las pequeñas rotaciones asociadas con la deformación por corte.

Las componentes del vector de curvatura de la teoría de Timoshenko \mathbf{K}_T de la configuración deformada son:

$$K_T^i = k^i + \beta^i, \quad (49)$$

donde β^1 es la torsión y β^α las curvaturas de la línea de referencia debidas a la deformación.

Las medidas de deformación de ambas teorías están relacionadas por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma}'_s + \mathbf{P}\boldsymbol{\gamma}_s, \quad (50)$$

donde

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0 & k^2 & -k^1 & 0 \\ 0 & k^3 & 0 & -k^1 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Considerando que generalmente se acepta que las deformaciones debidas a la distorsión por corte son de un orden menor que las medidas de la deformación de la teoría clásica, la Densidad de Energía de segundo orden será suficiente para construir una teoría de Timoshenko generalizada. Es decir, una teoría que utilice variables similares pero que deje de lado la hipótesis de que la sección se mantiene plana luego de la deformación. Entonces reemplazando la (50) en la (47) y considerando que las componentes de $\boldsymbol{\gamma}_s$ son de un orden menor que las de $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$, permitiendo descartar los términos de orden superior, se puede escribir

$$2U = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon} + 2\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{A}\mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma}'_s + 2\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{A}\mathbf{P}\boldsymbol{\gamma}_s + 2\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{B}\boldsymbol{\epsilon}' + \boldsymbol{\epsilon}'^T \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}' + 2\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}'' \quad (52)$$

Teóricamente si la expresión de la Densidad de Energía de la teoría de Timoshenko generalizada es correcta la (48) y la (52) deberían ser equivalentes. Para probarlo uno debe deshacerse de las derivadas en la (52). Una manera de realizar esto es utilizar las ecuaciones de equilibrio de la viga, luego de lo cual se puede igualar la expresión hallada a la (48), resultando las siguientes ecuaciones matriciales

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} - 2\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_3 + \mathbf{D}_1 \mathbf{F}^T + \mathbf{D}_2 \mathbf{X}) + 2\mathbf{B}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_3 + 2\mathbf{D}\mathbf{N}^{-1} [(\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{B}_3 - \mathbf{A}_3 \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{D}_1 \mathbf{F}^T + \mathbf{D}_2 \mathbf{X})] \quad (53)$$

$$\mathbf{F} = -\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_3 + \mathbf{D}_1 \mathbf{G} + \mathbf{D}_2 \mathbf{F}) + \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_3 + \mathbf{D}\mathbf{N}^{-1} [(\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_3 \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{D}_1 \mathbf{G} + \mathbf{D}_2 \mathbf{F})] \quad (54)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}_3^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_3 \quad (55)$$

donde

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -k^1 \\ k^1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} k^3 & 0 & 0 & 0 \\ -k^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^3 & k^2 \\ 0 & k^3 & 0 & -k^1 \\ 0 & -k^2 & k^1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (56)$$

$$\mathbf{D}_4 = \mathbf{Q} - \mathbf{D}_2^T;$$

Lo que resta es resolver las (53), (54) y (55) para obtener las matrices \mathbf{X} , \mathbf{F} y \mathbf{G} . En ellas aparecen la torsión y las curvaturas iniciales k^i , que en este caso se caracterizaron como pequeñas, a través de las matrices \mathbf{D}_j , entonces se puede usar métodos perturbativos para resolver dichas ecuaciones. Para ello se plantea cada matriz incógnita como una serie de matrices cada una de las cuales es de determinado orden en el parámetro \bar{k} , a saber

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots\end{aligned}\tag{57}$$

donde las matrices \mathbf{X}_0 , \mathbf{F}_0 y \mathbf{G}_0 son de orden \bar{k}^0 ; las matrices \mathbf{X}_1 , \mathbf{F}_1 y \mathbf{G}_1 son de orden \bar{k}^1 ; y las matrices \mathbf{X}_2 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{G}_2 son de orden \bar{k}^2 ; siendo \bar{k} el valor representativo de las componentes del vector \mathbf{k} . En este caso no será necesario considerar las matrices de orden \bar{k}^2 o superior en \bar{k} para obtener una solución adecuada para el orden de precisión utilizado en el desarrollo de este modelo.

De esta forma se obtienen las componentes de orden \bar{k}^0 que resultan

$$\mathbf{G}_0 = (\mathbf{Q}^T \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{Q})^{-1},\tag{58}$$

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{G}_0,\tag{59}$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A} + \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{F}_0^T.\tag{60}$$

Las de orden \bar{k}^1 , son

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{J}_G,\tag{61}$$

$$\mathbf{F}_1 = -(\mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{J}_F + \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{J}_G) \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{N}_0)^T,\tag{62}$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{J}_X - 2(\mathbf{J}_F + \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{J}_G) \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{F}_0^T + \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{F}_0^T + \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{F}_1^T,\tag{63}$$

donde \mathbf{J}_G , \mathbf{J}_F y \mathbf{J}_X son matrices que pueden calcularse en base a matrices y vectores ya calculados o conocidos.

De esta forma se obtienen las matrices \mathbf{X} , \mathbf{F} y \mathbf{G} sumando las componentes de orden \bar{k}^0 y \bar{k}^1 , correspondientes a la matriz de rigidez de la teoría de Timoshenko generalizada.

4. CONCLUSIONES

Como conclusiones podemos decir que en la primera parte de este trabajo:

- Se han logrado establecer parámetros que describen adecuadamente el comportamiento estructural del Rotor VGOT Darriues,
- Se han acoplado adecuadamente los resultados de los programas de cálculo aerodinámico y estructural, y
- Se han identificado las no linealidades ha incluir en la siguiente etapa, es decir cálculo apto para grandes desplazamientos y secciones no homogéneas de las secciones.

En la segunda parte se presentó un modelo de deformación de la sección cuyas variables son equivalentes a las de la teoría de Timoshenko y que resulta asintóticamente correcto desde el punto de vista de la energía. El mismo es apto para grandes desplazamientos, secciones no homogéneas y no utiliza ninguna hipótesis restrictiva en cuanto al modo de deformación de la sección, lo cual contempla el libre alabeo de la misma.

REFERENCIAS

- [1] F. L. Ponta and C. A. Luna Pont, “A novel technique for high-power electricity generation in high-speed wind regimes,” In *Vth World Renewable Energy Congress, Florence*, pages 1936–1939. Pergamon, (1998).
- [2] K. J. Bathe, *Finite element Procedures*, Prentice Hall, (1996).
- [3] Y. W. Kwon and H. Bang, *The finite element method using Matlab*, CRC Press, (1997).
- [4] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical analysis*, Brooks Cole, (1998).
- [5] F. L. Ponta and J. J. Seminara, “Double-multiple streamtube model for variable-geometry oval-trajectory Darrieus wind turbines,” In *VIth World Renewable Energy Congress, Brighton, U.K.*, pages 2308–2311. Pergamon, (2000).
- [6] J. J. Seminara and F. L. Ponta, “Numerical experimentation about an oval-trajectory Darrieus wind turbine,” In *VIth World Renewable Energy Congress, Brighton, U.K.*, pages 1205–1209. Pergamon, (2000).
- [7] F. L. Ponta and J. J. Seminara, “Double-multiple streamtube model for V.G.O.T. Darrieus turbines with recent improvements,” In *2001 European Wind Energy Conference and Exhibition, Copenhagen*, pages 410–413. WIP - Renewable Energies and ETA, (2001).
- [8] J. J. Seminara and F. L. Ponta, “Numerical results for a V.G.O.T. Darrieus turbine for different wind compass-rose conditions,” In *2001 European Wind Energy Conference and Exhibition, Copenhagen*, pages 406–409. WIP - Renewable Energies and ETA, (2001).
- [9] F. L. Ponta, A. D. Otero, J. J. Seminara, and L. I. Lago, “Improved design for the structure and gear system of a blade element of a V.G.O.T. Darrieus,” In *VIIth World Renewable Energy Congress, Cologne*, page 222. Pergamon, (2002).
- [10] A. D. Otero and F. L. Ponta, “Numerical results for the structural behavior of a blade element of a V.G.O.T. Darrieus,” In *VIIth World Renewable Energy Congress, Cologne*, page 223. Pergamon, (2002).
- [11] W. Yu, D. H. Hodges, V. Volovoi, and C. E. S. Cesnik, “On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams,” *Int. J. Sol. and Struct.*, **39**, 5101–5121 (2002).
- [12] D. A. Danielson and D. H. Hodges, “Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor,” *J. App. Mech.*, **54**, 258–262 (1987).